DETERMINACIÓN DEL TAMAÑO MUESTRAL MEDIANTE EL USO DE ÁRBOLES DE DECISIÓN

Carlos Eduardo Valdivieso Taborga, Roberto Valdivieso Castellón, Oscar Álvaro Valdivieso Taborga

Universidad Privada Boliviana
cvaldivieso@upb.edu

RESUMEN

La determinación del tamaño muestral en una investigación es de vital importancia, tanto para caracterizar la distribución de la variable, como para fijar el grado de precisión del estudio. El propósito de este artículo es ofrecer ayuda en el cálculo del tamaño muestral cuando se efectúa un estudio de carácter cuantitativo (limitado al uso de un muestreo aleatorio simple, unietápico y fijo), en el cual se utilizan métodos estadísticos inferenciales como medios para el análisis, como ser la estimación estadística, las pruebas de hipótesis y el análisis de experimentos, que requieren de información precisa sobre las variables consideradas, y que es obtenida a partir de la muestra representativa de la respectiva población.

El artículo presenta varias ecuaciones para la determinación del tamaño muestral, agrupadas en 6 figuras, usando la ayuda didáctica de los árboles de decisión, que facilitan su elección. Con el fin de ejemplificar la manera de utilizar los árboles de decisión para la elección de la ecuación adecuada en el cálculo del tamaño muestral, se muestra un ejemplo de investigación, que es desarrollado completamente, desde la concepción del problema hasta las conclusiones finales. Por otro lado, se exponen algunas bases teóricas y empíricas que ayuden a utilizar de la mejor manera posible las distintas ecuaciones que permiten el cálculo del tamaño muestral.

Palabras Clave: Cálculo del Tamaño Muestral, Árboles de Decisión, Estadística Educacional.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Importancia de la determinación del tamaño muestral

Varios autores coinciden en que una decisión importante en cualquier investigación es la selección adecuada del tamaño muestral (Montgomery [29], Gutiérrez y de la Vara [13]). Marrugat *et al.* [42] sostiene que la estimación del tamaño muestral puede considerarse un instrumento del que dispone el investigador para evaluar la factibilidad y la necesidad de recursos de su proyecto. Sin embargo, la utilización de hipótesis verosímiles deberá prevalecer sobre otros intereses como las posibilidades económicas, la disponibilidad de recursos u otros. No es ético realizar un estudio con un tamaño de muestra que no ofrezca un poder estadístico suficiente, ya que, desde el punto de vista de la metodología científica, el diseño no es adecuado. Kerlinger y Lee [37] y Camacho-Sandoval [38], afirman que para aquellos investigadores que llevan a cabo grandes investigaciones donde el costo de la recolección de datos es alto, la determinación del tamaño de muestra resulta crítica, ya que el interés radica en conseguir la mejor información al menor costo:

- Un tamaño de muestra demasiado grande representa un desperdicio de recursos, tanto materiales como humanos (Fuentelsaz [40]). Además la calidad del estudio, dado dicho incremento, puede verse afectada en sentido negativo (Fernández [39]).
- Un tamaño demasiado pequeño es un desperdicio de esfuerzo, pues no podrá detectar un efecto significativo o se tendrán menos probabilidades de hacerlo.

Kerlinger y Lee [37] manifiestan que aunque la mayoría de los investigadores tratan de simplificar los conceptos y procedimientos implicados, el proceso de determinación del tamaño muestral para estudios de investigación no resulta trivial ni sencillo. De hecho afirman que es uno de los problemas más difíciles en la estadística aplicada.

Namakforoosh [34], Kerlinger y Lee [37] y otros autores, mencionan el uso de métodos con reglas intuitivas sin justificación alguna. Uno de ellos es calcular el tamaño muestral con base en una proporción del tamaño de la población (2%), otra es asignar arbitrariamente un valor grande (2000). Ninguna de estas opiniones es válida.

1.2. Factores que afectan al cálculo del tamaño muestral

Gutiérrez y de la Vara [13], Namakforoosh [34], y Camacho-Sandoval [38], entre otros, indican que la decisión para la determinación del tamaño muestral dependerá de varios factores, según los objetivos de la investigación:

- La magnitud de las diferencias que se quiere detectar en la investigación, es decir, la importancia de la decisión a tomar. Si son pequeñas mayor será el tamaño muestral y viceversa.
- La variación esperada en los datos, debido a fuentes de variación no controladas. A mayor variación será necesario un tamaño muestral mayor.
- El número de tratamientos (o muestras) que se desea comparar. A mayor número de ellos, menor tamaño muestral.
- Riesgo que está dispuesto a tomar el investigador. A menor riesgo, el tamaño deberá ser mayor. Aquí está incluida la potencia de la prueba que se desea.
- La complejidad de los análisis estadísticos. Cuanto más complejos el tamaño deberá ser más grande.
- El número de variables o factores de estudio. Cuanto más numerosas, más grande tendrá que ser la muestra.
- El tamaño de la población. Para poblaciones finitas, el tamaño de muestra será menor que para poblaciones infinitas, pero la relación no es lineal (Mateu y Casal [41]).

1.3. Deficiencia de información en textos de consulta generales actuales

La mayor parte de los libros de Estadística, no importa cuál sea su énfasis, sean de estadística matemática o teórica (Mood/Graybill [8], Maisel [9], Hays y Winkler [10], Batattacharyya y Johnson [17], Larson [21], Giardina [22], Muxica [23], Hoel [24]), elemental o intermedia (Freund y Simon [4], Lobez y Casa [11], Yamane [19]), aplicada a distintos campos (Berenson, Levine y Krehbiel [1], Levin y Rubin [2], Mason y Lind [3], Miller, Freund y Jonson [5], Mendenhall [6], García [7], Programa Ford-Itesm [14], Merril y Fox [18]); libros de investigación de mercados (Kinnear y Taylor [31], Aaker y Day [32], Kotler [33]), metodología de investigación (Namakforoos [34], Sampieri, Collado y Lucio [35], Briones [36]), control estadístico de calidad (Montgomery [12], Juran y Gryna [15], Duncan [16]), o econometría (Novales [20]), otorgan prácticamente una o dos opciones para el cálculo del tamaño muestral representativo para llevar a cabo una investigación cuantitativa; es decir, aquella que realizará análisis estadísticos inferenciales a los datos recopilados, con el propósito de alcanzar sus objetivos. Estas ecuaciones sólo sirven para realizar estimaciones acerca de la media de una población o de la proporción poblacional, usando intervalos de confianza y con la posibilidad de cometer un error tipo I.

Por otro lado, la mayoría de los libros de análisis y diseño de experimentos (Gutiérrez y de la Vara [13], Martínez [26], Myers [27]) solo presentan el cálculo del número de réplicas de un diseño experimental de una variable de entrada. Montgomery [29] es el único que presenta una guía bastante exhaustiva para el cálculo del número de réplicas cuando se usan distintos modelos, tanto para efectos fijos como aleatorios.
La razón que sustenta esta falencia puede ser la que comentan Gutiérrez y de la Vara [13]: “Aunque existen varios métodos para estimar el tamaño muestral, muchos tienen poca aplicabilidad, porque requieren cierto conocimiento previo sobre la varianza del error experimental”; o la que sostienen Kerlinger y Lee [37]: “La respuesta dada por estos métodos no es completamente precisa y sólo debe utilizarse como una guía para ayudar a tomar decisiones inteligentes acerca de la conducta del estudio”.

En muchos casos no se quiere estimar la media o proporción poblacionales, sino la varianza poblacional, la diferencia de medias, de proporciones o el cociente de varianzas. Por otro lado, algunas veces se quiere probar conjeturas de estos parámetros poblacionales o de su comparación. Para este tipo de casos, se deben usar otras fórmulas de cálculo del tamaño muestral que no han sido difundidas adecuadamente, y que es necesario tomarlas en cuenta, en las cuales están incluidas la protección contra los dos tipos de errores, tipo I y II.

Al respecto, algunos artículos (Camacho-Sandoval [38], Fernández [39], Fuentelsaz [40], Mateu y Casal [41], Marrugat *et al.* [42], entre otros) muestran las ecuaciones para la determinación del tamaño muestral cuando se usan pruebas de hipótesis de la diferencia de medias o proporciones. Solamente StatPoint Inc. [25] muestra las ecuaciones para el cálculo del tamaño muestral para una prueba de hipótesis y estimación de varianzas y cociente de varianzas.

1.4. Propósito del artículo

El propósito de este artículo es proporcionar una guía práctica para el cálculo del tamaño muestral representativo en investigaciones donde se usen técnicas estadísticas como la estimación estadística, las pruebas de hipótesis paramétricas, o los diseños experimentales, para lograr obtener el objetivo pretendido, en el marco del muestreo aleatorio simple, unietápico y fijo (no secuencial).

En este sentido, se utilizará la ayuda didáctica de los árboles de decisión, muy adecuada cuando se tienen que elegir una opción de entre muchas, que difieren entre sí por características similares (como ejemplo ver Valdivieso, Valdivieso y Valdivieso [30]).

2. ÁRBOLES DE DECISIÓN PARA LA ELECCIÓN DEL TAMAÑO MUESTRAL

El árbol de decisión es una excelente ayuda para la elección entre varios cursos de acción, ya que proveen una estructura efectiva dentro de la cual estimar cuales son las opciones más adecuadas.

Se han configurado 6 árboles de decisión para elegir de manera sencilla y sin ambigüedades el tamaño muestral adecuado y representativo para llevar a cabo investigaciones de carácter cuantitativo. A continuación se describe el contenido de cada una de ellas.

Figura 1: Árbol de decisión general para el cálculo del tamaño muestral. Es el primer árbol al que se debe acudir; en él se encuentran todas las opciones que tiene el investigador en cuanto a parámetros poblacionales a estimar o probar en su estudio. Dependiendo de la elección, el investigador deberá remitirse a la Figura 2 hasta la Figura 6.
Figura 2: Árbol de decisión para el cálculo del tamaño muestral en la estimación de parámetros poblacionales. En este árbol se encuentran los tamaños muestrales para la estimación de la media, proporción y varianza; es decir cuando se usa una sola muestra.
Figura 3: Árbol de decisión para el cálculo del tamaño muestral en la estimación de la comparación de parámetros poblacionales. En este árbol se encuentran los tamaños muestrales para la estimación de la diferencia de medias, diferencia de proporciones y el cociente de varianzas; es decir cuando se usan dos muestras.
Figura 4: Árbol de decisión para el cálculo del tamaño muestral en la prueba de las conjeturas o hipótesis de parámetros poblacionales. En este árbol se encuentran los tamaños muestrales para las pruebas de hipótesis de la media, proporción y varianza.
Figura 5: Árbol de decisión para el cálculo del tamaño muestral en la prueba de las conjeturas o hipótesis de la comparación de parámetros poblacionales. En este árbol se encuentran los tamaños muestrales para las pruebas de hipótesis de la diferencia de medias, diferencia de proporciones y cociente de varianzas.
Figura 6: Árbol de decisión para el cálculo del tamaño muestral en diseños experimentales. En este árbol se hallan los tamaños muestrales para el diseño aleatorio simple, bloque aleatorizado y el diseño factorial con máximo dos factores; es decir para más de dos muestras.

3. BASES TEÓRICAS Y EMPÍRICAS PARA LA FOMRULACIÓN DE TAMAÑOS MUESTRALES

A continuación se describen las bases teóricas y empíricas para la formulación de ecuaciones para el cálculo del tamaño muestral representativo de una investigación.

3.1. Figura 2. Árbol de decisiones para la elección del tamaño muestral en la estimación de un parámetro poblacional

3.1.1. Fundamentos de los riesgos en la estimación estadística

El objetivo de la estimación por intervalos es encontrar un límite superior e inferior donde se halle el parámetro poblacional que se desea estimar, con una probabilidad prefijada de antemano por el investigador, denominada nivel de certeza o confianza, y denotada por $1-\alpha$.

Berenson, Levine y Krehbiel [1], sostienen que para determinar el tamaño de la muestra, hay que recordar que la variable tipificada en una distribución de medias muestrales es:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \tag{1}$$

donde z es el valor crítico de un área de cola superior de α 2 de una distribución normal estándar. Si se multiplican ambos lados de (1) por $\frac{\sigma}{\overline{n}}$ (el error estándar), se tiene:

$$z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{x} - \mu = e \tag{2}$$

El valor z es positivo o negativo, según x sea mayor o menor que μ. La diferencia entre la media muestral x y la media poblacional μ, denotada por e, se conoce como error de muestreo.

3.1.2. Estimación de la media poblacional

Si se observa en (2), el error máximo que se puede tolerar en la estimación de una media poblacional, cuando se conoce la desviación poblacional y la población es infinita depende:

- Del intervalo de confianza fijado para estimar la media poblacional, $1 - \alpha$
- De la desviación estándar poblacional, σ
- Del tamaño muestral, n_0

En la práctica no es fácil determinar estas tres cantidades, y las debe estimar un experto en la materia; es decir una persona muy familiarizada con las variables que se van a estudiar. 95% es el nivel de confianza más común, pero si se desea un nivel de confianza mayor se usa 99%, y si se desea un nivel menor se usa 90%. En cuanto al error de muestreo, no debe pensarse en qué cantidad de error se desea (en realidad no se quiere tener errores) sino cuánto se puede tolerar para poder proporcionar conclusiones adecuadas al estudio. También se debe disponer de una estimación de la desviación poblacional, que en algunos casos se la realiza a partir de datos históricos o experiencia del experto, o también se puede llevar a cabo un estudio piloto para estimarla con los datos muestrales.

Despejando n_0 de (2), el mínimo tamaño de muestra para no exceder el error máximo, tomando en cuenta una población infinita viene dado por la expresión:

$$n_0 = \left(z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{e} \right)^2 \tag{3}$$

En todo el artículo la notación n_0 designa el tamaño muestral para población infinita, y n, se refiere al tamaño muestral para población finita.

Si la población es finita, se conoce el tamaño poblacional N, el error máximo viene dado por:

$$e = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \tag{4}$$

donde la expresión $\overline{\frac{N-n}{N-1}}$ se conoce como el multiplicador de población finita, que es un factor de ajuste, y se utiliza para rebajar la varianza muestral estimada (Namakforoosh [34]). Despejando n de la ecuación (4):

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \sigma^2 N}{z_{\alpha/2}^2 \sigma^2 + e^2 (N-1)} \tag{5}$$

Siguiendo un procedimiento similar es que se han generado las demás ecuaciones de la Figura 2.

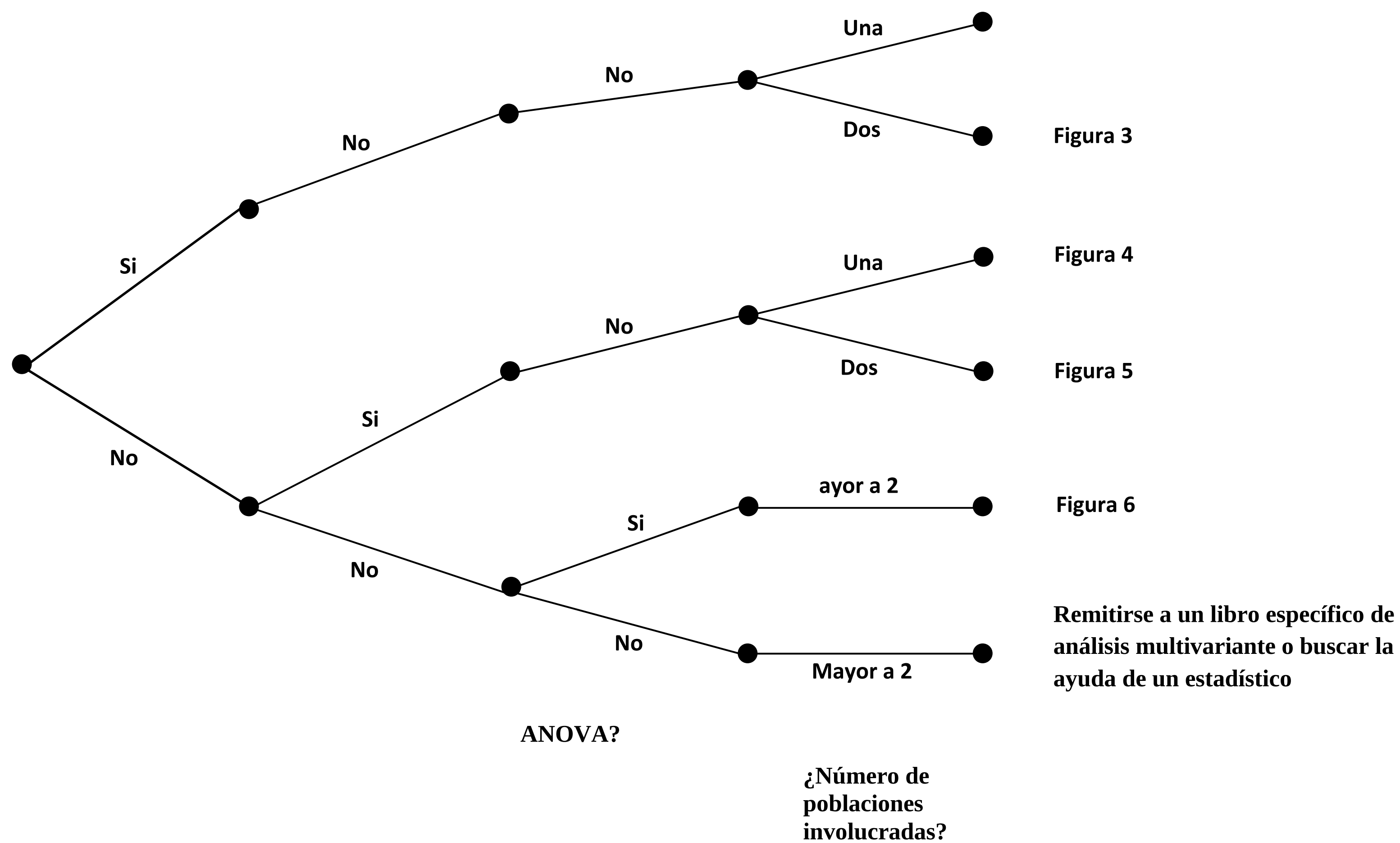
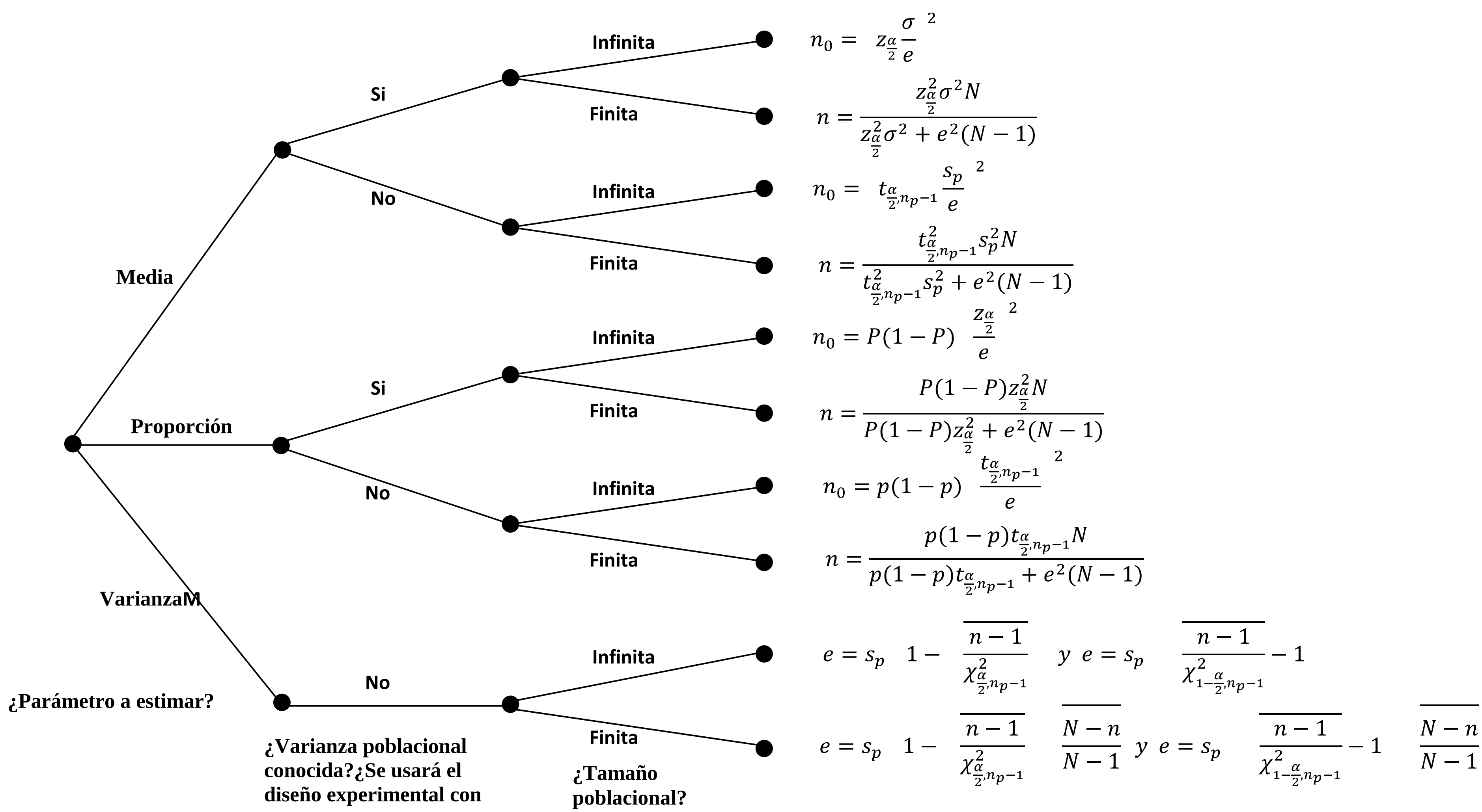
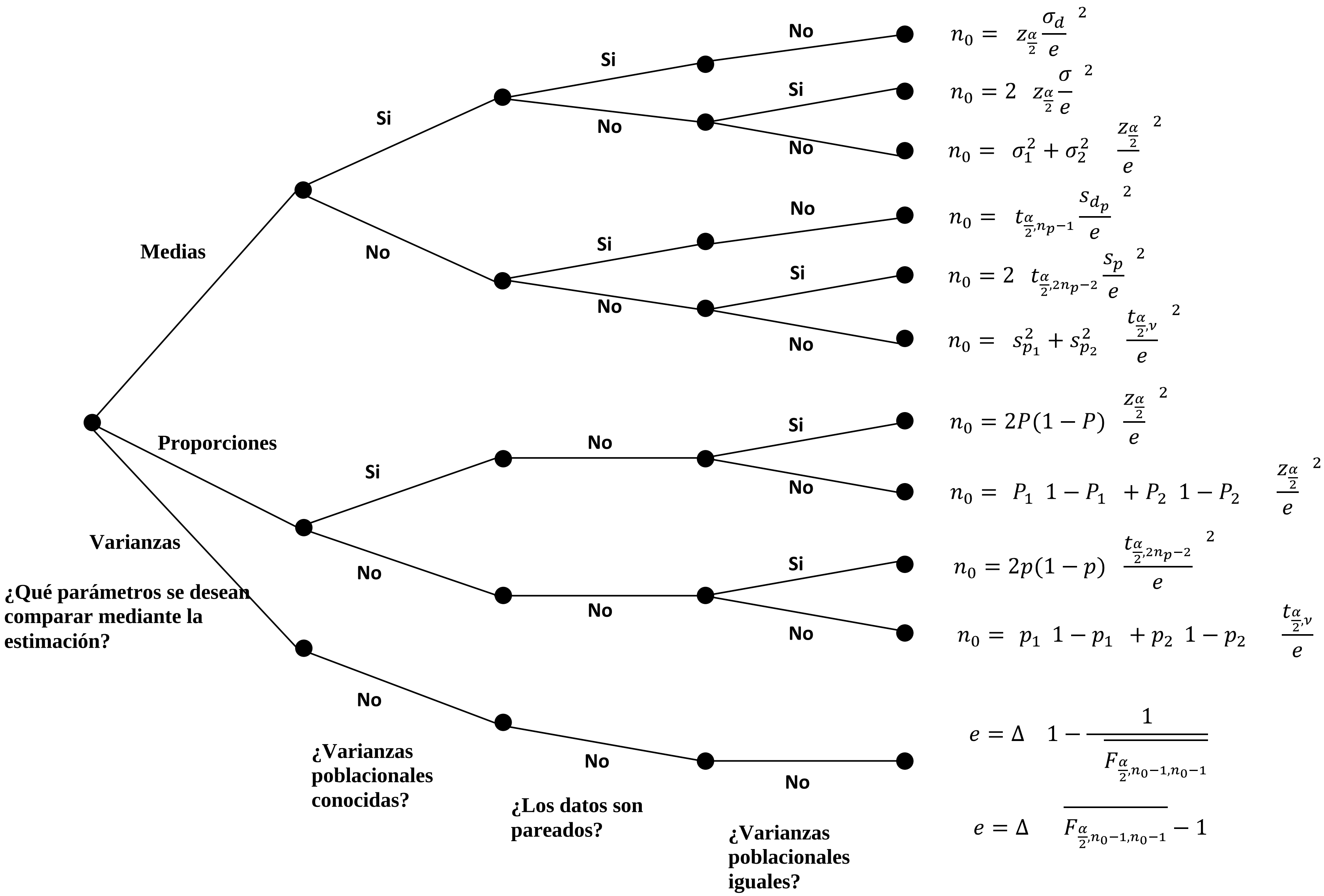


Figura 1 - Árbol de decisión general para la elección del tamaño muestral



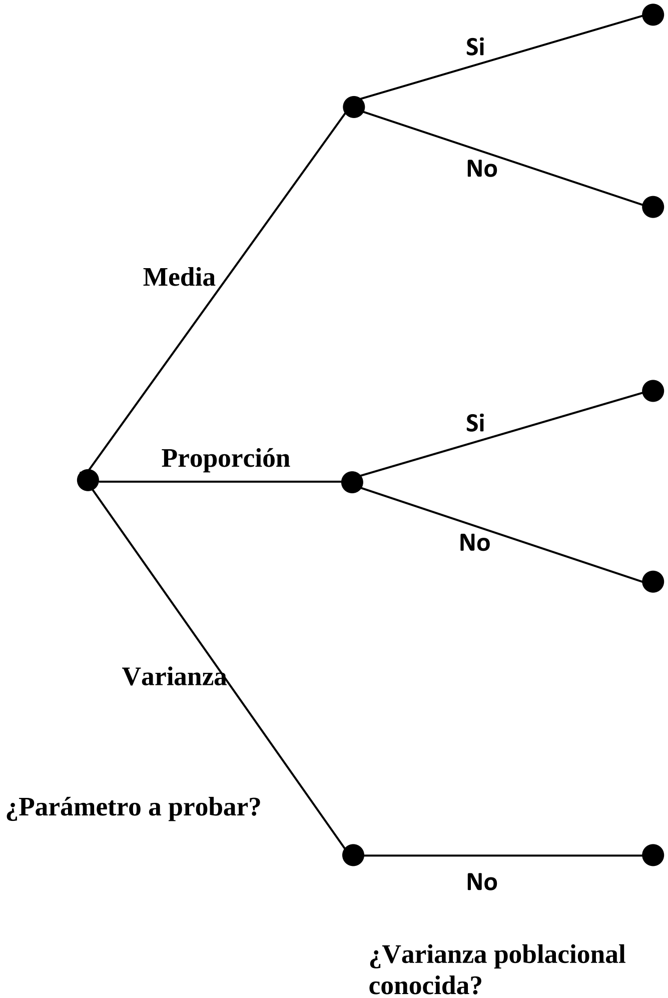
n_p : tamaño de la muestra piloto; P : proporción patrón o norma de la población; p : proporción de la muestra piloto; s_p : desviación estándar de la muestra piloto.

Figura 2 - Árbol de decisión para la elección del tamaño muestral en la estimación de un parámetro poblacional.



σ_d y s_{d_p}, son la desviación poblacional de la diferencia y la desviación de la diferencia de la muestra piloto, respectivamente. Δ es la diferencia entre varianzas que se quiere detectar.

Figura 3 - Árbol de decisión para la elección del tamaño muestral en la estimación de la comparación de parámetros poblacionales.



$$n_0 = \left(\frac{\left(z_{\frac{\alpha}{2}} + z_\beta\right)\sigma}{\Delta}\right)^2$$

$$n_0 = \left(\frac{\left(t_{\frac{\alpha}{2},n_p-1} + t_{\beta,n_p-1}\right)s_p}{\Delta}\right)^2$$

$$n_0 = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} + z_\beta}{\Delta}\right)^2 P(1-P)$$

$$n_0 = \left(\frac{t_{\frac{\alpha}{2},n_p-1} + t_{\beta,n_p-1}}{\Delta}\right)^2 p(1-p)$$

$$n_0 = 1{,}5 + 0{,}5\left(\frac{\lambda\left(z_{\frac{\alpha}{2}} + z_\beta\right)}{\lambda - 1}\right)^2$$

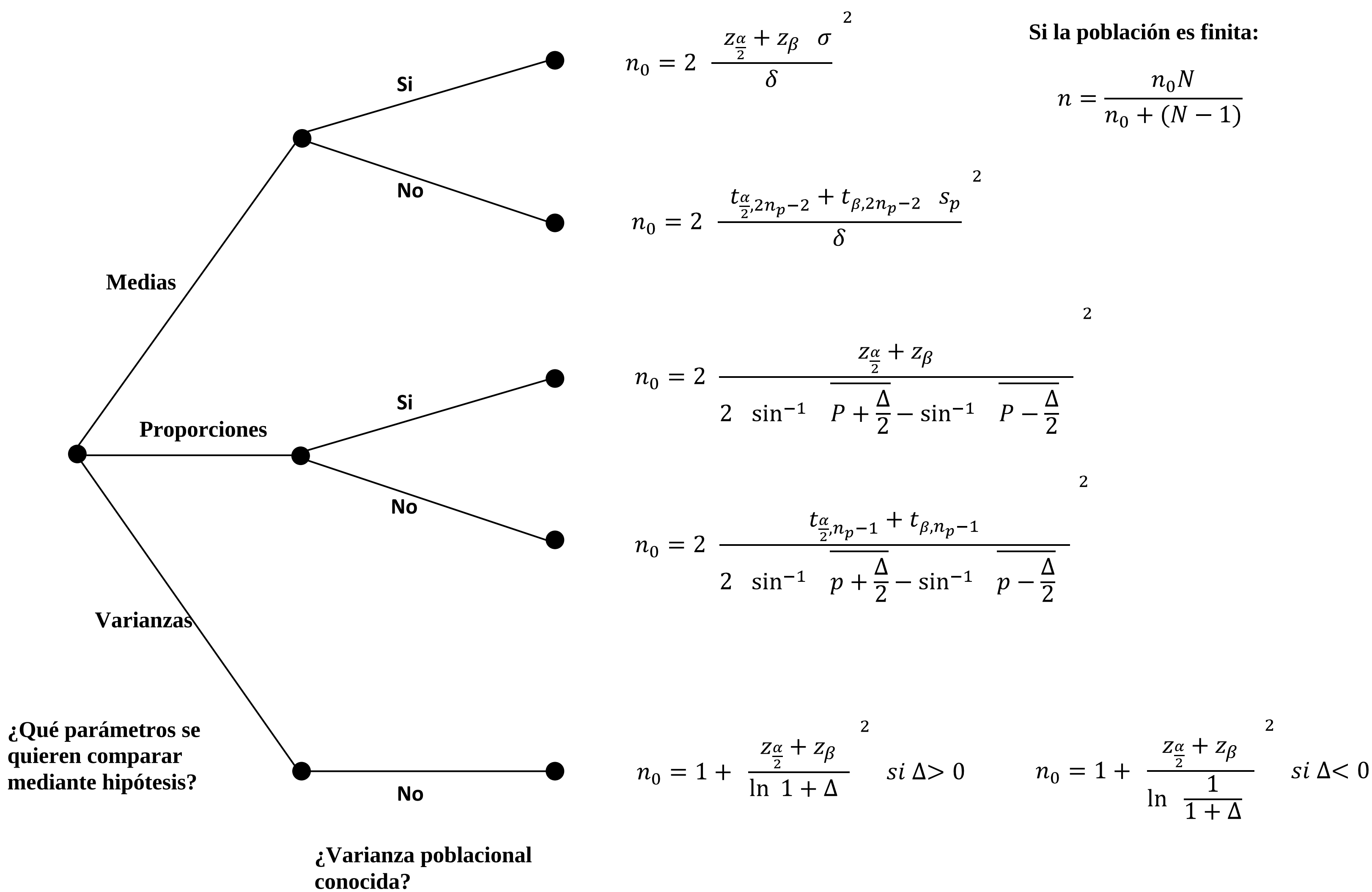
Si la población es finita:

$$n = \frac{n_0 N}{n_0 + (N-1)}$$

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\sigma + \Delta} & \Delta > 0 \\ \dfrac{\sigma + \Delta}{\sigma} & \Delta < 0 \end{cases}$$

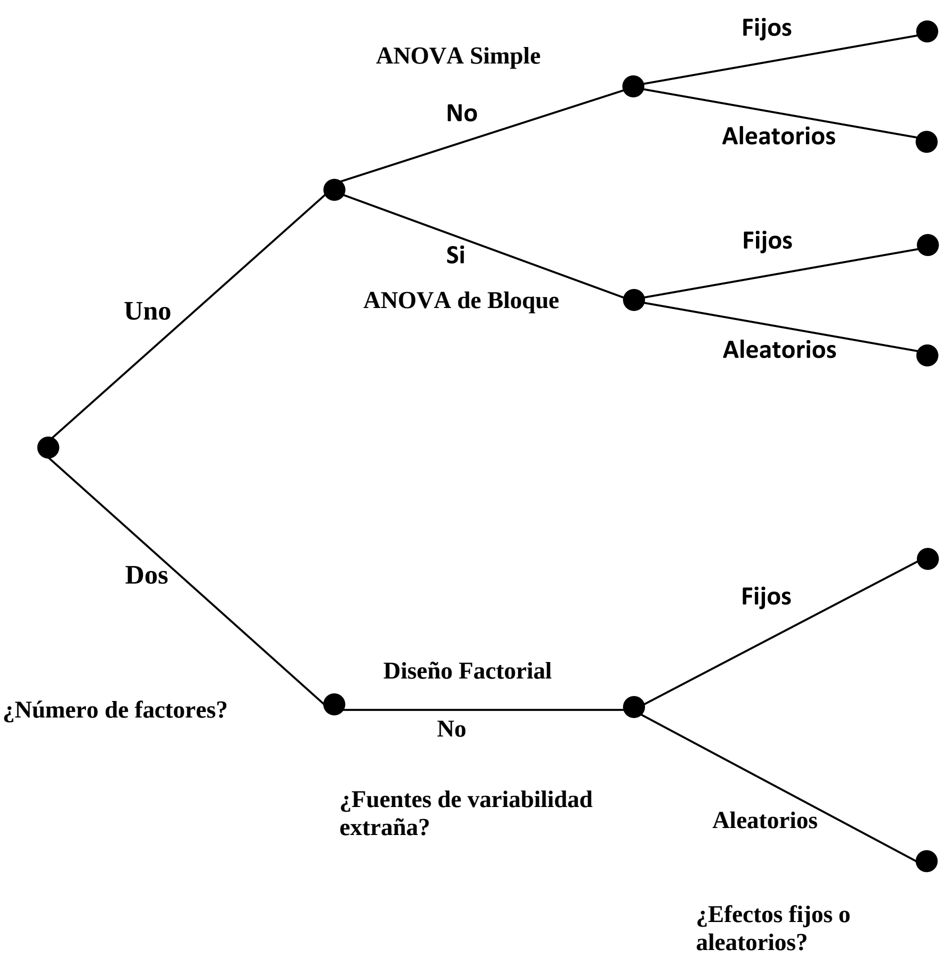
Δ es la diferencia entre el parámetro poblacional de la hipótesis nula y el estadístico de la muestra.

Figura 4 - Árbol de decisión para el cálculo del tamaño muestral en la prueba de las conjeturas o hipótesis de parámetros poblacionales.



δ, es la diferencia de medias que se quiere detectar.

Figura 5 - Árbol de decisión para el cálculo del tamaño muestral en la prueba de las hipótesis de la comparación de parámetros poblacionales



$$\Phi^2 = \frac{n_0 \sum_{i=1}^{a} \tau_i^2}{a\sigma^2} \qquad \Phi^2 = \frac{n_0\, D^2}{2a\sigma^2} \qquad \nu_1 = a-1 \quad \nu_2 = a(n_0-1)$$

$$\lambda = \sqrt{1 + \frac{n_0\sigma_\tau^2}{\sigma^2}} \qquad \nu_1 = a-1 \quad \nu_2 = a(n_0-1)$$

$$\Phi^2 = \frac{b \sum_{i=1}^{a} \tau_i^2}{a\sigma^2} \qquad \Phi^2 = \frac{b\, D^2}{2a\sigma^2} \qquad \nu_1 = a-1 \quad \nu_2 = a-1\ (b-1)$$

$$\lambda = \sqrt{1 + \frac{b\sigma_\tau^2}{\sigma^2}} \qquad \nu_1 = a-1 \quad \nu_2 = a-1\ (b-1)$$

A: $\Phi^2 = \frac{bn_0 \sum_{i=1}^{a} \tau_i^2}{a\sigma^2}$ $\qquad \Phi^2 = \frac{n_0 b\, D^2}{2a\sigma^2}$

B: $\Phi^2 = \frac{an_0 \sum_{i=1}^{a} \tau_i^2}{b\sigma^2}$ $\qquad \Phi^2 = \frac{n_0 a\, D^2}{2b\sigma^2}$

AB: $\Phi^2 = \frac{n_0 \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \tau\beta_{ij}^{2}}{\sigma^2\ a-1\ \ b-1\ +1}$ $\qquad \Phi^2 = \frac{n_0 D^2}{\sigma^2\ a-1\ \ b-1\ +1}$

A: $\lambda = \sqrt{1 + \frac{bn_0\sigma_\tau^2}{\sigma^2 + n_0\sigma_{\tau\beta}^2}}$ $\qquad \nu_1 = a-1 \quad \nu_2 = ab\ n_0 - 1$

B: $\lambda = \sqrt{1 + \frac{an_0\sigma_\beta^2}{\sigma^2 + n_0\sigma_{\tau\beta}^2}}$ $\qquad \nu_1 = b-1 \quad \nu_2 = ab\ n_0 - 1$

AB: $\lambda = \sqrt{1 + \frac{n_0\sigma_{\tau\beta}^2}{\sigma^2}}$ $\qquad \nu_1 = a-1\ (b-1) \quad \nu_2 = ab\ n_0 - 1$

a es el número de tratamientos de A; b el número de bloques o tratamientos de B; σ^2, variabilidad de los tratamientos; τ_i , efectos de los tratamientos; σ_τ^2, variabilidad de los tratamientos; D, máxima diferencia entre medias de tratamientos; $\tau\beta_{ij}^{2}$, efectos de interacción; $\sigma_{\tau\beta}^2$, variabilidad de los efectos de interacción; ν_1, grados de libertad de los tratamientos; ν_2, grados de libertad del error.

Figura 6 - Árbol de decisión para el cálculo del tamaño muestral de diseños experimentales usando ANOVA.

3.1.3. Estimación de la proporción poblacional

Según Berenson, Levine y Krehbiel [1], los métodos para la determinación del tamaño muestral de una proporción son similares a los empleados para estimar la media poblacional.

El error máximo que se desea tolerar al estimar una proporción poblacional, cuando se conoce la varianza poblacional y para población infinita, viene dado por:

$$e = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \tag{6}$$

donde P es una proporción patrón de la población. De esa manera, el tamaño muestral viene dado por la expresión:

$$n = P(1-P)\left(\frac{z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 \tag{7}$$

Cuando no se tiene conocimiento de P o no se puede estimar mediante una muestra piloto, generalmente se usa el valor de 0,5 ya que este valor dará como resultado el tamaño de muestra más conservador, es decir, el mayor tamaño de muestra.

Si la población es finita, el error máximo viene dado por:

$$e = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \tag{8}$$

Si se despeja el tamaño muestral, se obtiene:

$$n = \frac{P(1-P)z_{\alpha/2}^2 N}{P(1-P)z_{\alpha/2}^2 + e^2(N-1)} \tag{9}$$

Si no se conoce la varianza poblacional y la población es infinita, se sigue un procedimiento similar al anterior para generar las ecuaciones adecuadas, que se muestran en la Figura 2.

3.1.4. Estimación de la varianza poblacional

Según la ayuda que brinda el paquete computacional de estadística Statgraphics Centurion 15.2 en sus manuales en línea, desarrollado por StatPoint Inc. [25], y modificado cuando se usa un estudio piloto, el error máximo al estimar la varianza poblacional viene dado por:

$$e = s_p\left(1 - \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2,n_p-1}}}\right) \quad y \quad e = s_p\left(\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2,n_p-1}}} - 1\right) \tag{10}$$

Si bien se puede despejar n de las dos ecuaciones simultáneas, es mejor calcular el tamaño muestral mediante sucesivas iteraciones. Todos los elementos son conocidos, excepto $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n_p-1}$, que es valor de la distribución *chi-cuadrada* de cola superior de probabilidad $\frac{\alpha}{2}$, con $n_p - 1$ grados de libertad.

3.2. Figura 3. Árbol de decisiones para la elección del tamaño muestral en la estimación de la comparación de parámetros poblacionales

3.2.1. Estimación de la diferencia de medias poblacionales

El error máximo que se puede tolerar en la estimación de la diferencia de medias con varianzas poblaciones conocidas pero distintas, viene dado por:

$$e = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \tag{11}$$

Generalmente $n_1 = n_2 = n_0$. Despejando n_0 se tiene:

$$n_0 = \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)\left(\frac{z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 \tag{12}$$

Si la población es finita, para cualquier caso de la Figura 3 o de las otras Figuras, se debe calcular el tamaño muestral mediante la siguiente ecuación (Kerlinger y Lee [37]):

$$n = \frac{n_0 N}{n_0 + (N-1)} \tag{13}$$

donde *n* es el tamaño muestral para poblaciones finitas y n_0 el tamaño muestral para poblaciones infinitas.

Si por alguna razón no se quiere trabajar con la relación $n_1 = n_2 = n_0$, se debe fijar el porcentaje de la muestra 2 en relación a la muestra 1 en una cantidad distinta al 50%:

$$\rho = \frac{n_1}{n_1 + n_2}\,(100) \tag{14}$$

De la misma manera, se pueden obtener otras ecuaciones similares cuando no se conocen las varianzas poblacionales y se las debe estimar mediante muestras piloto, Figura 3.

3.2.2. Estimación de la diferencia de proporciones poblacionales

El error máximo que se puede tolerar al estimar una diferencia de proporciones poblacionales con varianzas poblacionales conocidas e iguales, y poblaciones infinitas, viene dado por:

$$e = z_{\alpha/2}\sqrt{P(1-P)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \tag{15}$$

Si se despeja el tamaño muestral suponiendo que las dos muestras tienen el mismo tamaño:

$$n_0 = 2P(1-P)\left(\frac{z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 \tag{16}$$

Asimismo se pueden obtener otras ecuaciones para el tamaño muestral cuando no se conocen las varianzas poblacionales, usando el muestreo piloto, Figura 3.

3.2.3. Estimación del cociente de varianzas poblacionales

Según StatPoint Inc. [25], el error máximo al estimar el cociente de varianzas poblacionales es:

$$e = \Delta\left(1 - \frac{1}{\sqrt{F_{\alpha/2, n_0-1, n_0-1}}}\right) \text{ y } e = \Delta\left(\sqrt{F_{\alpha/2, n_0-1, n_0-1}} - 1\right) \tag{17}$$

donde Δ es la diferencia de varianzas que se quiere calcular en la estimación y $F_{\alpha/2, n_0-1, n_0-1}$, es el valor de la distribución F de Fisher de cola superior de probabilidad $\underline{\alpha/2}$ con $n_0 - 1$ grados de libertad del numerador y $n_0 - 1$ grados de libertad del denominador.

Al igual que en el caso de la estimación para la varianza poblacional, es mejor calcular el tamaño muestral realizando iteraciones, en vez de despejarlo.

3.3. Figura 4. Árbol de decisión para el cálculo del tamaño muestral en la prueba de las conjeturas o hipótesis de parámetros poblacionales

3.3.1. Fundamentos de los riesgos al usar las pruebas de hipótesis

Según Martínez [26], uno de los objetivos fundamentales de toda investigación científica es la prueba de hipótesis. Para tal propósito, se plantea una hipótesis, que puede ser cierta o falsa. El problema que se tiene entonces, es definir una regla de decisión que permita, en los términos de sus observaciones experimentales, inclinarse por una u otra posibilidad.

Según Berenson, Levine y Krehbiel [1], al usar un estadístico muestral para tomar decisiones respecto a un parámetro poblacional, existe el riesgo de llegar a una conclusión incorrecta, pudiendo ocurrir dos tipos de errores: Tipo I y II.

- Ocurre un error tipo I si se rechaza la hipótesis nula H_0 cuando en realidad es verdadera y no debe rechazarse. La probabilidad de que ocurra este error es α.
- Ocurre un erro tipo II si se acepta la hipótesis nula H_0 cuando en realidad es falsa y debe rechazarse. La probabilidad de que ocurra este error es β.

Gutiérrez y de la Vara [13] declaran que α se conoce como el *nivel de significancia* dado de la prueba y es la probabilidad de la región de rechazo; su valor se especifica en la etapa de planeación. Generalmente, se utilizan los valores de 0,05 o 0,01. Mientras más pequeño es el valor de α se requiere más evidencia en los datos para rechazar H_0. En la práctica, la elección de α depende del costo de cometer un error tipo I:

- Si la acción a tomar después de rechazar H_0 implica una inversión fuerte, se recomienda usar 0,01 para tener mayor confianza de que la decisión será la adecuada.
- Si la decisión no implica una fuerte inversión, es suficiente trabajar con 0,05.

No necesariamente un valor de α más pequeño es mejor, ya que si se admite poco riesgo se está truncando la posibilidad de implementar muchos cambios que podrían ser positivos.

Según Gutiérrez y de la Vara [13], β es el riesgo del consumidor, que a diferencia del error tipo I, que se controla con la selección de α, la probabilidad de cometer un error tipo II depende de la diferencia entre el valor hipotético y el valor real del parámetro poblacional. Por lo general, se diseña la prueba de modo que el valor de β sea pequeño, que se puede controlar con el tamaño muestral. A $1-\beta$ se le llama *poder* o *potencia de la prueba* y es la probabilidad de rechazar H_0 cuando es falsa. En otras palabras, cuanto mayor es el tamaño muestral mayor será la potencia de la prueba. Se recomiendan valores de β de 0,1 o un poder de prueba de 0,9. La Tabla 2 muestra el balance entre los riesgos y la toma de decisiones luego de una prueba de hipótesis.

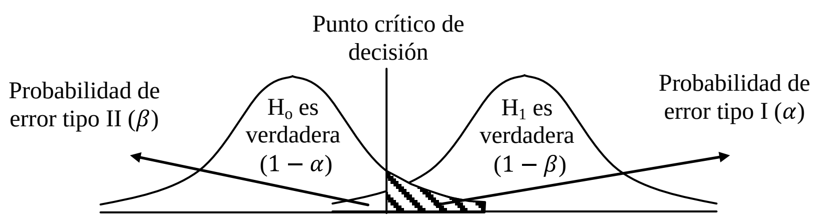
TABLA 1 - RIESGOS EN LAS PRUEBAS DE HIPÓTESIS

Decisión Estadística	**Situación Real**	
	H_0 es cierta	**H_0 es falsa**
Se acepta H_0	Decisión correcta $P\ confianza\ = 1-\alpha$	Error tipo II $P\ error\ tipo\ II\ = \beta$
Se rechaza H_0	Error tipo I $P\ error\ tipo\ I\ = \alpha$	Decisión correcta $P\ poder\ = 1-\beta$

Fuente: Berenson, Levine y Krehbiel [1]

En la práctica, suele ser más delicado cometer un error tipo I que un error tipo II. Sin embargo, al disminuir α aumentará β para un tamaño muestral dado.

Según Kerlinger y Lee [37], en la mayor parte de los casos se tiende a establecer un criterio muy riguroso del error tipo I, y existe una menor probabilidad de cometerlo. Sin embargo, como existe una relación entre los errores tipo I y tipo II, ésta debe considerarse antes de realizar la decisión. La Figura 7 muestra esta relación.



Fuente: Kerlinger y Lee [37]

Figura 7 - Relación entre los errores tipo I y II.

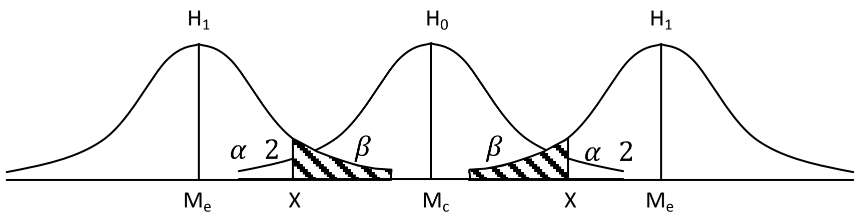
3.3.2. Prueba de hipótesis para la media poblacional

Según StatPoint Inc. [25] y Kerlinger y Lee [37], el tamaño muestral representativo para probar una media poblacional, con varianza conocida y población infinita viene dado por:

$$n_0 = \left(\frac{(z_{\alpha/2}+z_\beta)\,\sigma}{\Delta}\right)^2 \tag{18}$$

donde Δ, es la diferencia de la media muestral con la media de la hipótesis nula, que se desea detectar en la prueba; $z_{\frac{\alpha}{2}}$, es la distancia del valor crítico a la media en H_0, en unidades de desviación estándar; z_β, es la distancia del valor crítico a la media en H_1, en unidades de desviación estándar.

A continuación, se describe cómo se forma el estadístico de prueba que se usa para la técnica (Marrugat *et al.* [42]). En la Figura 8, se puede ver una generalización del fundamento de la estimación del tamaño de la muestra en un contraste bilateral. En ella se aprecia el punto M_c, correspondiente a la media del grupo de referencia (hipótesis nula), M_e correspondiente a la media de un grupo con una intervención alternativa y el punto X representa el valor de la distribución normal correspondiente al riesgo $\alpha/2$ aceptado en el contraste de hipótesis bilateral en la distribución de media M_c, y que define el riesgo β en la distribución hipotéticamente distinta de media M_e. La zona sombreada es la del riesgo β y la sin sombrear la del riesgo $\alpha/2$. Cuando $M_e > M_c$ se tienen la distancia $X - M_c = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$, y la distancia $M_e - X = z_\beta\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$.



Fuente: Marrugat *et al.* [42]

Figura 8 - Distribución de los valores de una variable continua según la hipótesis nula y alternativa en un contraste bilateral.

donde $z_{\alpha/2}$ es el valor de la distribución normal correspondiente al punto X en la distribución de referencia de media M_c y z_β en la distribución de media M_e. Obsérvese que al tratarse siempre de un contraste unilateral en la z_β correspondiente a la hipótesis alternativa, se toma la distancia (M_e - X) para poder tomar el valor z_β positivo; de otro modo, cuando β es menor que 0,50, z_β debería tomar valores negativos. Igualando para X se obtiene:

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} + M_c = -z_\beta\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} + M_e \tag{19}$$

de donde se obtiene la ecuación 18 anterior, en la cual $\Delta = M_e - M_c$.

Todas las demás ecuaciones de la Figura 4 presentan el mismo fundamento. Si se realiza una prueba de una cola (superior o inferior) se debe cambiar en (18) y (19), α en lugar de $\alpha/2$.

Fernández [39] afirma que antes de realizar una prueba de hipótesis se debe definir si va a ser unilateral o bilateral:

- Bilateral: Cualquiera de los dos parámetros a comparar (medias o proporciones) puede ser mayor o menor que el otro. No se establece dirección.
- Unilateral: Cuando se considera que uno de los parámetros debe ser mayor que el otro, indicando por tanto una dirección de las diferencias.

La hipótesis bilateral es una hipótesis más conservadora y disminuye el riesgo de cometer un error de tipo I (rechazar la H_0 cuando en realidad es verdadera). El contraste unilateral debería reservarse exclusivamente para aquellas circunstancias en que una diferencia en un sentido llevaría a la misma acción que la inexistencia de diferencias (Marrugat *et al.* [42]).

También se puede deducir el tamaño muestral para la prueba de hipótesis de una media poblacional cuando no se conoce la varianza poblacional, mediante una muestra piloto.

3.3.3. Prueba de hipótesis para la proporción poblacional

Presenta el mismo fundamento que para una prueba de hipótesis para la media poblacional, siendo conocida o no la varianza poblacional, sabiendo que la varianza de una proporción es: $P(1-P)$.

3.3.4. Prueba de hipótesis para la varianza poblacional

StatPoint Inc. [25], encuentra el valor más pequeño de n tal que:

$$n_0 = 1{,}5 + 0{,}5\left(\frac{\lambda\, z_{\alpha/2} + z_\beta}{\lambda - 1}\right)^2 \qquad \lambda = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sigma+\Delta} & \Delta > 0 \\ \frac{\sigma+\Delta}{\sigma} & \Delta < 0 \end{cases} \tag{20}$$

donde Δ es la diferencia de la varianza de la muestra con la de la hipótesis nula.

3.4. Figura 5. Árbol de decisión para el cálculo del tamaño muestral en la prueba de hipótesis de la comparación de parámetros poblacionales

Las ecuaciones para el cálculo del tamaño muestral para una prueba de hipótesis de comparación de parámetros poblacionales presenta el mismo fundamento que el mostrado en la Figura 4.

3.4.1. Prueba de hipótesis para la diferencia de medias poblacionales

Para el caso de la determinación del tamaño muestral de la prueba de hipótesis de la diferencia de medias, sea M_c, la primera media poblacional y M_e la segunda, X el punto de decisión en una escala de diferencias entre medias, $z_{\frac{\alpha}{2}}$, el valor de la distribución normal correspondiente al valor del error α aceptado en una prueba bilateral; z_β, el correspondiente al error β aceptado; se asumen que las desviaciones poblacionales son iguales para simplificar. La especificación del error α correspondiente a la hipótesis alternativa $M_c - M_e \neq 0$ lleva a:

$$X - (M_c - M_e) = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{2\,\sigma^2}{n}} \tag{21}$$

De forma similar, la especificación del riesgo β conduce a:

$$(M_c - M_e) - X = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{2\,\sigma^2}{n}} \tag{22}$$

igualando para *X* y despejando *n*, (suponiendo que $n_c = n_e$) se tiene el tamaño muestral:

$$n_0 = 2\left(\frac{(z_{\alpha/2} + z_\beta)\,\sigma}{\delta}\right)^2 \tag{23}$$

donde todos los términos son conocidos excepto δ, que es la máxima diferencia de medias que se quiere calcular en la prueba $(M_c - M_e)$.

3.4.2. Prueba de hipótesis de la diferencia de proporciones poblacionales

Según Marrugat *et al.* [42], aplicando la aproximación normal a la distribución binomial, se puede llegar a las ecuaciones que se describen a continuación.

Llamando P a la proporción media de la proporción de acontecimientos de interés del grupo control c y del grupo tratado e, P_c a la proporción de acontecimientos de interés en el grupo control, P_e a la proporción en el grupo expuesto, y utilizando el resto de notaciones igual que en apartados anteriores, de forma similar se puede llegar a la siguiente expresión:

$$n_0 = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sqrt{2P(1-P)}+z_\beta\sqrt{P_c(1-P_c)+P_e(1-P_e)}}{(P_e-P_c)}\right)^2 \tag{24}$$

Una alternativa a la ecuación anterior es la aproximación sinusoidal inversa al cálculo de la probabilidad exacta de Fisher. Esta aproximación está basada en el hecho de que cuando la proporción $P_c < 0{,}5$, el $arcoseno\left(\sqrt{p}\right) \approx p$, y el $seno\, p \approx p$. El arcoseno se expresa en radianes. La transformación de P es la siguiente: $\varphi(P) = 2\, arcoseno\left(\sqrt{P}\right)$, cuyo valor oscila entre 0 y π, posee la propiedad de que su desviación estándar es: $\frac{1}{\sqrt{n}}$, y es independiente de P. Esta transformación permite llegar a la expresión siguiente:

$$n_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{z_{\alpha/2}+z_\beta}{\sin^{-1}\left(\sqrt{P_c}\right)-\sin^{-1}\left(\sqrt{P_e}\right)}\right)^2 \tag{25}$$

StatPoint Inc. [25], realizando algunas otras transformaciones similares se llega a:

$$n_0 = 2\left(\frac{z_{\alpha/2}+z_\beta}{2\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{P+\frac{\Delta}{2}}\right)-\sin^{-1}\left(\sqrt{P-\frac{\Delta}{2}}\right)\right)}\right)^2 \tag{26}$$

donde Δ es la diferencia $P_e - P_c$ que se quiere detectar, y P es la proporción patrón poblacional aproximada o dispuesta como norma.

3.4.3. Prueba de hipótesis del cociente de varianzas poblacionales

StatPoint Inc. [25] establece que el tamaño muestral para una prueba de hipótesis del cociente de varianzas es:

$$n_0 = 1 + \left(\frac{z_{\alpha/2}+z_\beta}{\ln(1+\Delta)}\right)^2 \quad si\ \Delta > 0 \qquad n_0 = 1 + \left(\frac{z_{\alpha/2}+z_\beta}{\ln\left(\frac{1}{1+\Delta}\right)}\right)^2 \quad si\ \Delta < 0 \tag{27}$$

donde Δ es la diferencia de varianzas que se quiere detectar en la prueba.

3.5. Figura 6. Árbol de decisión para el cálculo del tamaño muestral de diseños experimentales usando ANOVA

Según Montgomery [29], una curva característica de operación es una gráfica de la probabilidad del error tipo II de una prueba de inferencia estadística, para un tamaño de muestra particular, contra el parámetro que refleja la extensión en la cual la hipótesis nula es falsa. Estas curvas son una guía para seleccionar el tamaño muestral para que el diseño sea sensible a diferencias potenciales entre tratamientos.

El modelo experimental es de efectos fijos cuando los tratamientos del diseño experimental son fijados específicamente por el investigador. Será de efectos aleatorios cuando los tratamientos han sido seleccionados aleatoriamente de una población.

3.5.1. Modelo de efectos fijos para un diseño completamente aleatorizado (ANOVA simple)

El modelo de un experimento de comparación simple con una variable de entrada (un factor), ya sea de efectos fijos o aleatorios, tiene el siguiente modelo estadístico:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \qquad \begin{matrix} i = 1,2,\dots,a \\ j = 1,2,\dots,n \end{matrix} \tag{28}$$

donde μ, es el efecto medio global; τ_i, es el efecto del tratamiento i; ε_{ij}, es el componente del error aleatorio.

La probabilidad del error tipo II es:

$$\beta = 1 - P(Se\ rechaza\ H_0/H_o\ es\ falsa)$$
$$\beta = 1 - P(F_0 > F_{\alpha,a-1,N-a}/H_o\ es\ falsa)$$

Para evaluar esta probabilidad, se requiere conocer la distribución del estadístico F_0 si la hipótesis nula es falsa. Si eso ocurre F_0 tiene distribución F no centrada, con a-1 y N-a grados de libertad y un parámetro de descentralización δ. Si $\delta = 0$, la distribución se transforma en la F centrada (a es el número de tratamientos del diseño y N es el número de datos del diseño experimental).

Las curvas características de operación se muestran en las tablas de anexos de varios libros de análisis y diseño de experimentos (Martínez [26], Montgomery [29], Myers [27]), que son los que construyeron Pearson y Hartley en 1951. En ellas se indica la probabilidad del error tipo II en función del parámetro Φ^2, que según Myers [27] es un ratio F basado en la población; es decir, es n veces la varianza entre las medias de los tratamientos de la población dividida por la varianza del error de la población, dando como resultado:

$$\Phi^2 = \frac{n_0 \sum_{i=1}^{a} \tau_i^2}{a\sigma^2} \tag{29}$$

Φ^2 está asociado al parámetro de descentralización δ. Hay curvas para $\alpha = 0{,}05$ y $\alpha = 0{,}01$, para diversos valores de los grados de libertad del numerador y denominador.

Para hallar n_0, el investigador debe dar un valor a Φ. Esto es muy difícil de determinar, pero una forma de hacerlo es elegir los valores de las medias de tratamiento para los cuales se desea rechazar la hipótesis nula con una probabilidad alta. Si $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_a$ son las medias de tratamiento propuestas, el valor de τ_i (efectos de los tratamientos) se encuentra usando la anterior ecuación, donde cada efecto de tratamiento se calcula mediante:

$$\tau_i = \mu_i - \mu = \mu_i - \frac{\sum_{i=1}^{a} \mu_i}{a} \tag{30}$$

Es decir, el promedio de las medias individuales de tratamiento. También es necesaria una estimación de σ^2, que se la obtiene por experiencias pasadas, experimentos previos o estimaciones propuestas. Cuando no hay seguridad en esta estimación, el tamaño de las muestras puede determinarse para un intervalo de valores posibles y estudiar sus efectos.

Cuando resulta difícil seleccionar el conjunto de medias de tratamiento sobre el cual se basará la decisión, un enfoque más sencillo es seleccionar el tamaño de muestra de manera que se rechace la hipótesis nula si la diferencia entre cualquier par de medias de tratamiento (usualmente se toma la máxima diferencia entre medias) excede un valor específico D, donde Φ^2 se obtiene mediante:

$$\Phi^2 = \frac{n_0 D^2}{2a\sigma^2} \tag{31}$$

3.5.2. Modelo de efectos aleatorios para un diseño completamente aleatorizado (ANOVA simple)

Montgomery [29] afirma que la probabilidad del error tipo II para este modelo es:

$$\beta = 1 - P(Se\ rechaza\ H_0/H_o\ es\ falsa)$$
$$\beta = 1 - P(F_0 > F_{\alpha,a-1,N-a}/\sigma_\tau^2 > 0)$$

Es posible demostrar que si H_1 es verdadera ($\sigma_\tau^2 > 0$) F_0 tiene una distribución F centrada, con a-1 y N-a grados de libertad (σ_τ^2 es la variabilidad de los efectos de los tratamientos).

En las curvas características para este modelo (Montgomery [29]) se grafica la probabilidad del error tipo II contra el parámetro λ, siguiendo la relación:

$$\lambda = \sqrt{1 + \frac{n_0\sigma_\tau^2}{\sigma^2}} \tag{32}$$

Si se tiene una idea de cuanta variabilidad es importante detectar en la población de tratamientos, puede estimarse σ_τ^2. Mediante experiencias anteriores se puede estimar σ^2. Para definir σ_τ^2 a veces es útil usar la relación $\frac{\sigma_\tau^2}{\sigma^2}$.

3.5.3. Diseño de Bloques Aleatorios (ANOVA de Bloques)

El modelo de un experimento de comparación simple con una variable de entrada (un factor), y una variable de bloque, ya sea de efectos fijos o aleatorios, tiene el siguiente modelo estadístico:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\dots,a \\ j = 1,2,\dots,b \end{array} \tag{33}$$

donde μ, es el efecto medio global; τ_i, es el efecto del tratamiento i; β_j, es el efecto del bloque j, ε_{ij}, es el componente del error aleatorio.

En un diseño aleatorizado por bloques, es importante determinar el número de bloques (b). En el caso del modelo de efectos fijos, se deben usar las curvas características de operación (CCO) con el parámetro Φ^2 dado por:

$$\Phi^2 = \frac{b \sum_{i=1}^{a} \tau_i^2}{a\sigma^2} \tag{34}$$

$$\Phi^2 = \frac{b\, D^2}{2a\sigma^2} \tag{35}$$

donde a-1 son los grados de libertad de numerador y (a-1)(b-1) los del denominador (b es el número de bloques del diseño experimental).

Si el modelo es de efectos aleatorios, se usan las CCO con la relación:

$$\lambda = \sqrt{1 + \frac{b\sigma_\tau^2}{\sigma^2}} \tag{36}$$

donde los grados de libertad son los mismos que para el modelo de efectos fijos.

3.5.4. Diseño Factorial

El modelo factorial de dos factores tiene el siguiente modelo estadístico:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\dots,a \\ j = 1,2,\dots,b \\ k = 1,2,\dots,c \end{array} \tag{37}$$

donde μ, es el efecto medio global; τ_i, es el efecto del i-ésimo nivel del factor renglón A; β_j, es el efecto del j-ésimo nivel del factor columna B; $(\tau\beta)_{ij}$, es el efecto de la interacción entre τ_i y β_j, ε_{ijk}, es el componente del error aleatorio.

En la Tabla 3, se presenta el valor apropiado del parámetro Φ^2, así como los grados de libertad del numerador y denominador, para el modelo de efectos fijos. Una forma muy eficiente de usar estas curvas es determinar el valor mínimo de Φ^2, que corresponde a una diferencia especificada entre dos medias de tratamiento. Si la diferencia entre dos medias de renglón o columna, o efectos de interacción es D, entonces se tienen los valores mínimos mostrados en la Tabla 3.

TABLA 2 - ECUACIONES PARA EL CÁLCULO DEL TAMAÑO MUESTRAL PARA DISEÑO FACTORIAL DE DOS FACTORES (A Y B)

Factor	Φ^2	Valor mínimo de Φ^2	Grados de libertad del numerador	Grados de libertad de denominador
A	$\Phi^2 = \frac{bn_0 \sum_{i=1}^{a} \tau_i^2}{a\sigma^2}$	$\Phi^2 = \frac{n_0 b\, D^2}{2a\sigma^2}$	$a-1$	$ab(n_0-1)$
B	$\Phi^2 = \frac{an_0 \sum_{i=1}^{a} \beta_i^2}{b\sigma^2}$	$\Phi^2 = \frac{n_0 a\, D^2}{2b\sigma^2}$	$b-1$	$ab(n_0-1)$
AB	$\Phi^2 = \frac{n_0 \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\tau\beta)_{ij}^2}{\sigma^2 [(a-1)(b-1)+1]}$	$\Phi^2 = \frac{n_0 D^2}{\sigma^2 [(a-1)(b-1)+1]}$	$(a-1)(b-1)$	$ab(n_0-1)$

Fuente: Montgomery [29].

Las curvas características de operación, permiten determinar el tamaño muestral aproximado para obtener un poder de prueba específico en el diseño de efectos aleatorios. Las condiciones se muestran en la Tabla 4.

TABLA 3 - ECUACIONES PARA EL CÁLCULO DEL TAMAÑO MUESTRAL PARA MODELO DE EFECTOS ALEATORIOS

Factor	λ	ν_1	ν_2
A	$\lambda = \sqrt{1 + \frac{bn_0\sigma_\tau^2}{\sigma^2 + n_0\sigma_{\tau\beta}^2}}$	$a-1$	$(a-1)(b-1)$
B	$\lambda = \sqrt{1 + \frac{an_0\sigma_\beta^2}{\sigma^2 + n_0\sigma_{\tau\beta}^2}}$	$b-1$	$(a-1)(b-1)$
AB	$\lambda = \sqrt{1 + \frac{n_0\sigma_{\tau\beta}^2}{\sigma^2}}$	$(a-1)(b-1)$	$ab(n_0-1)$

Fuente: Montgomery [29]

3.5.5. Tamaño Muestral para las Pruebas de Rangos Múltiples

Después de realizar el ANOVA de efectos fijos para detectar si existe algún tratamiento diferente, si se rechaza la hipótesis nula, se debe realizar una prueba de rangos múltiples para comprobar la igualdad o diferencia de medias de los pares de tratamientos que se puedan conformar y obtener el tratamiento ganador.

Hay numerosas pruebas de rangos múltiples. Montgomery [29] y StatPoint Inc. [25] indican algunas de ellas: 1) Mínima diferencia significativa (LSD = Least significant difference), 2) Intervalos múltiples de Duncan, 3) Prueba de Newman-Keuls, 4) Prueba de Tukey, 5) Prueba de Dunnett (cuando existe un tratamiento de control), 6) Bonferroni, y 7) Scheffé.

Según Montgomery [29] no es claro cuál de estos métodos es el mejor o más útil. Sin embargo, Carmer y Swanson (1973), tras haber realizado estudios de simulación Montecarlo, concluyeron que el método LSD es una prueba muy eficiente para detectar diferencias verdaderas en las medias si se aplica hasta después que la prueba F del ANOVA ha sido significativa en un 5%. Así, en este artículo, se hará uso de este método.

El error máximo que se puede cometer en la estimación de la media para la diferencia entre dos tratamientos (cuando el diseño es balanceado), usando el método LSD es:

$$e = t_{\alpha/2,f} \sqrt{\frac{2\, MS_E}{n}} \qquad (38)$$

donde f son los grados de libertad del error (N-a en un ANOVA simple, $(a-1)(b-1)$ en un ANOVA de bloques, $ab(n-1)$ en un ANOVA para diseño factorial de dos factores), donde a es el número de tratamientos del primer factor, b el número de bloques o el número de tratamientos del segundo factor.

Observando la ecuación, se concluye que este error depende del nivel de confianza fijado, la varianza del error aleatorio y del tamaño muestral. Entonces, el mínimo tamaño de muestra para no exceder un error fijado, vendrá dado por:

$$n = 2\, MS_E \left(\frac{t_{\alpha/2,f}}{e} \right)^2 \tag{39}$$

Como ejemplo, si se considera que un ingeniero quiere probar si los porcentajes de algodón influyen en la resistencia a la tensión de las telas para la confección de camisas para varón, y quiere que la diferencia entre cualquiera de dos tratamientos no sobrepase de ± 5 psi, con una confianza del 95%, y que una estimación a priori de la varianza del error es de 9, el tamaño de la muestra para cada tratamiento debe ser de:

$$n = 2\,(9) \left(\frac{2{,}1314}{5} \right)^2 = 3{,}3 \approx 4$$

n = 4 es el tamaño mínimo de la muestra que conduciría a la precisión deseada de ± 5 psi. El cálculo se realiza mediante aproximaciones, ya que el valor de t depende del valor de n.

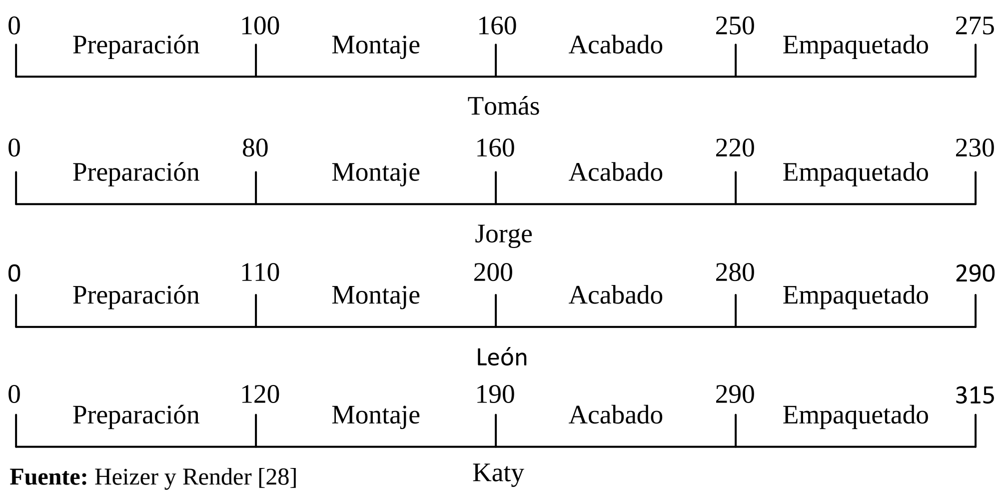
4. EJEMPLO DEL CÁLCULO DEL TAMAÑO MUESTRAL PARA UNA INVESTIGACIÓN

La problemática industrial de este ejemplo de investigación ha sido tomada de Heizer y Render [28], pero ha sido modificada para el propósito de este artículo, de modo de lograr didáctica y contundencia en la ejemplificación del cálculo del tamaño muestral.

4.1. Antecedentes de la Investigación

Jorge, el dueño de una empresa que fabrica mesas de roble, desea realizar un estudio de eficiencia acerca de la asignación óptima de sus operarios en las etapas de su proceso productivo. El proceso de fabricación consiste en cuatro pasos: preparación, montaje, acabado y empaquetado. Cada paso lo realiza una persona. Además de supervisar toda la operación, Jorge hace todo el acabado. Tomás realiza la operación de preparación, que implica cortar y darle forma a los componentes básicos de las mesas. León está encargado del montaje y Katy realiza el empaquetado. Aunque cada persona es responsable de sólo una etapa, todos pueden realizar cualquiera de ellas. Según la política de Jorge, ocasionalmente cada uno puede completar varias mesas por su cuenta sin ninguna ayuda o asistencia. Se realiza una pequeña competición para ver quién puede terminar una mesa entera en menos tiempo. Jorge guarda los tiempos de terminación de cada proceso para cada empleado. Los datos se muestran en la Tabla 5.

TABLA 5 - TIEMPO DE FABRICACIÓN DE MESAS EN MINUTOS



Fuente: Heizer y Render [28]

A Katy le lleva más tiempo construir una mesa de roble que a los otros. Además de ser más lenta que los otros empleados, Katy está descontenta con su actual responsabilidad de empaquetado, que la tiene parada la mayor parte del día. Su primera preferencia es el acabado y la segunda, la preparación. León tiene muchos problemas en la etapa de montaje, y su primera elección de cambio es ir a preparación. Además de la calidad, Jorge está interesado en los costos y la eficiencia. Cuando uno de los empleados falta un día, esto provoca importantes problemas de programación. Las horas extras son caras, y esperar a que el empleado vuelva al trabajo provoca retrasos y, a veces, detiene todo el proceso de fabricación.

Para superar algunos de estos problemas, se contrató a Randy. Las principales obligaciones de Randy son las de realizar trabajos variados y echar una mano si alguno de los empleados no está. Jorge ha preparado a Randy en todas las fases del proceso de fabricación, y está contento con la rapidez con la que Randy ha sido capaz de aprender a montar completamente las mesas. Los tiempos de finalización totales e intermedios de Randy se dan en la Tabla 6.

TABLA 6 - TIEMPO DE FABRICACIÓN EN MINUTOS PARA RANDY

0	110	190	290	300
Preparación	Montaje	Acabado	Empaquetado	

Fuente: Heizer y Render [28]

4.2. Objetivos de la investigación

Jorge quiere llevar a cabo una investigación a fin de conocer algunos aspectos específicos acerca de la productividad de sus operarios, para luego tomar decisiones óptimas de asignación de personal. Como quiere llevar a cabo esta investigación con una precisión deseada, y realizar un tratamiento estadístico de los datos que recopilará, un paso primordial será el cálculo del tamaño muestral sujeto a los siguientes objetivos de investigación:

1. Jorge cree que la operación de montaje es la más crítica del proceso. ¿A cuál de sus operarios asignaría para minimizar el tiempo de esa etapa (sin incluir a Randy)? Jorge quiere detectar una diferencia máxima entre medias de tratamientos de 15 minutos.
2. Como Katy no se siente bien realizando el empaquetado, Jorge quiere entrenarla mejor para que disminuya su actual tiempo de la operación de acabado y transferirla a esa etapa. La va a someter a un entrenamiento que dura un mes. Los resultados después del periodo de entrenamiento dirán si Jorge podrá pasar a Katy a la operación de acabado. Jorge solo tolerará un error máximo en la estimación de medias de 6 minutos.
3. Por otro lado Jorge quiere conocer si León es mejor o peor que él en la etapa de preparación. Para averiguarlo primero quiere determinar si la variabilidad del tiempo de León difiere con la suya. Posteriormente, y tomando en cuenta este aspecto, necesita saber si asigna a León la etapa de preparación o lo cambia a acabado, que es donde Jorge sabe que se desempeña bien. ¿Cuál debe ser la decisión? Jorge quiere detectar una diferencia de varianzas de 4, y una diferencia de medias de 10.
4. El problema con Katy es bastante complejo. Se sabe que su tiempo es mucho mayor al de Randy en la etapa de empaquetado. Sin embargo, Jorge medirá su rendimiento, no tomando en cuenta el tiempo, sino el número de empaquetados que cumplen las exigencias de calidad. Para ello deberá realizar un muestreo del número de mesas mal empaquetadas por los dos. Si Katy tiene mayor número de paquetes defectuosos que Randy, Jorge deberá asignar a Katy el trabajo de Randy, es decir, de hacer trabajos variados y sustituir a algún empleado que falte ¿Cuál deberá ser la decisión? Jorge estima que la proporción de mesas mal empaquetadas no debería sobrepasar del 25% y desea detectar una diferencia de proporciones del 30%.
5. Una vez analizado todo el proceso, Jorge quiere saber cuáles serían las ubicaciones que debería otorgar a sus empleados, para obtener un tiempo de fabricación de mesas óptimo. Quiere llenar los cuadros siguientes con los nombres adecuados.

Preparación	Montaje	Acabado	Empaquetado

6. Por último Jorge desea estimar la dispersión de tiempo de todas las etapas con respecto a los operarios en sus puestos de trabajo asignados óptimamente. Si la dispersión para cualquier etapa rebasa los 5 minutos, entonces someterá al operario respectivo a un periodo de entrenamiento. ¿Quiénes entrarán a ese programa? El máximo error que se quiere cometer al estimar la varianza es de 2.

7. La pregunta que se hace Jorge antes de comenzar con su investigación es: ¿Cuál es el tamaño muestral óptimo para realizar esta investigación, si por experiencia sabe que la desviación de cualquier operación es de 5 minutos?
   Para todas las pruebas Jorge ha elegido un nivel de significancia de 0,05, ya que la implementación de sus decisiones no involucra fuertes inversiones; y quiere obtener un poder de prueba del 90%.

4.3. Cálculo del tamaño muestral para la investigación

Para el cálculo del tamaño muestral óptimo a fin de llevar a cabo esta investigación, primero se deberán definir los análisis estadísticos que se realizarán para responder a cada pregunta planteada.

1. Diseño de experimentos. Como existe una variable de entrada, con 4 niveles (los cuatro operarios), se opta por el ANOVA simple, completamente aleatorizado, sin ninguna variable de bloque.
2. Se quiere comparar el tiempo que hace Katy en la etapa de acabado antes y después de un programa de entrenamiento. El análisis estadístico debe ser un intervalo de confianza para la diferencia de medias.
3. Aquí se deben realizar dos análisis. El primero es la prueba de hipótesis del cociente de varianzas, y el segundo la prueba de hipótesis de la diferencia de medias.
4. Se quiere comparar el número de mesas mal empaquetas de Katy y Randy con respecto al número total de mesas empaquetadas. Para ello se realizará un intervalo de confianza para la diferencia de proporciones.
6. Como se quiere estimar la dispersión del tiempo de cada etapa, se usará un intervalo de confianza para estimar la varianza.

Para la elección y posterior cálculo del tamaño muestral para cada pregunta, se hará uso de los 6 árboles de decisión desarrollados en el presente artículo. Luego, se deberán recopilar algunos datos del proceso de fabricación que permitan resolver cada objetivo de investigación y tomar las decisiones más adecuadas. Si bien usando las diferentes tablas existentes en cualquier libro de Estadística se pueden encontrar los valores críticos para las diferentes ecuaciones del tamaño muestral, en la Tabla 7 se resumen los valores más usados de z.

TABLA 7 - VALORES DE z_α Y z_β PARA DISTINTOS NIVELES DE SIGNIFICANCIA Y POTENCIA ESTADÍSTICA

Significancia (α)	Valor de z_α		Potencia $(1-\beta)$	Valor de z_β
	Prueba 1 Cola	Prueba 2 Colas	0,800	0,842
0,010	2,326	2,576	0,900	1,282
0,050	1,645	1,960	0,950	1,645
0,100	1,282	1,645	0,990	2,326

Fuente: Camacho-Sandoval [38]

1. Cálculo del tamaño muestral para el ANOVA simple

   Usando la Figura 1, se realiza la siguiente decisión:
   - ¿Se usará la estimación estadística? “No”.
   - ¿Se usará el método de pruebas de hipótesis? “No”.
   - ¿Se usará el diseño experimental con ANOVA? “Si”.
   - ¿Número de poblaciones involucradas? “Mayor a dos”.

   Remitiéndose a la Figura 6, se decide de la siguiente manera:
   - ¿Número de factores? “Uno”.
   - ¿Fuentes de variabilidad extraña? “No”, ANOVA simple.
   - ¿Efectos fijos o aleatorios? “Fijos”, ya que los operarios han sido previamente elegidos por el investigador, en este caso por Jorge.

   La ecuación del tamaño muestral es la siguiente:

$$\Phi^2 = \frac{n_0\, D^2}{2a\sigma^2}$$

Los datos que se necesitan son los siguientes: $D = 15$, $a = 4$, $\sigma^2 = 25$.

$$\Phi^2 = \frac{n_0\ 15^2}{2\ \ 4\ \ (25)} = 1{,}125\ n_0$$

Se elabora una tabla para el cálculo de Φ para distintos tamaños muestrales y se determina en las curvas características de operación (Montgomery [29], pp. 548, Martínez [26], pp. 714) el valor de β, para luego calcular el poder de prueba $1-\beta$, hasta que el valor llegue o sobrepase 0,9, que es el poder adecuado para la mayoría de los experimentos, Tabla 8.

TABLA 8 - CÁLCULO DEL TAMAÑO MUESTRAL PARA EL DISEÑO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO

n_0	Φ	$\nu_1 = a-1$	$\nu_2 = a(n_0-1)$	β	$1-\beta$
3	1,84	3	8	0,32	0,68
4	2,12	3	12	0,14	0,86
5	2,37	3	16	0,05	0,95

Con cinco réplicas en el experimento se logra obtener un poder de prueba del 95%.

2. Cálculo del tamaño muestral para el intervalo de confianza para la diferencia de medias.

Usando la Figura 1, se realiza la siguiente decisión:
- ¿Se usará la estimación estadística? "Si".
- ¿Se usará el método de pruebas de hipótesis? "No".
- ¿Se usará el diseño experimental con ANOVA? "No".
- ¿Número de poblaciones involucradas? "Dos".

Remitiéndose a la Figura 3, se decide de la siguiente manera:
- ¿Qué parámetros se desean estimar mediante la comparación? "Medias".
- ¿Varianzas poblacionales conocidas? "Si". Por dato histórico la varianza es de 25.
- ¿Los datos son pareados? "No".
- ¿Las varianzas de las poblaciones son iguales? "Si".

La ecuación para el tamaño muestral para la diferencia de medias es la siguiente:

$$n_0 = 2\ \ z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{e}\ ^{2}$$

Si Jorge sólo tolera un error máximo en la estimación de medias de 6 minutos, el tamaño muestral es:

$$n_0 = 2\ \ 1{,}96\frac{5}{6}\ ^{2} = 5{,}33 \approx 6$$

Berenson, Levine y Krehbiel [1] afirman que la regla general es redondear hacia arriba.

3. a) Cálculo del tamaño muestral de la prueba de hipótesis para el cociente de varianzas.

Usando la Figura 1, se realiza la siguiente decisión:
- ¿Se usará la estimación estadística? "No".
- ¿Se usará el método de pruebas de hipótesis? "Si".
- ¿Se usará el diseño experimental con ANOVA? "No".
- ¿Número de poblaciones involucradas? "Dos".

Remitiéndose a la Figura 5, se decide de la siguiente manera:
- ¿Qué parámetros se quieren probar mediante hipótesis? "Varianzas".
- ¿Varianza poblacional conocida? "No".

El tamaño muestral adecuado es el siguiente:

$$n_0 = 1 + \left(\frac{z_{\alpha/2} + z_\beta}{\ln(1+\Delta)}\right)^2 \quad si\ \Delta > 0$$

El cálculo es el siguiente, sabiendo que se quiere detectar una diferencia de varianzas de 4, y lograr una potencia de prueba del 90%:

$$n_0 = 1 + \left(\frac{1{,}96 + 1{,}28}{\ln(1+4)}\right)^2 = 5{,}06 \approx 6$$

3. b) Cálculo del tamaño muestral de la prueba de hipótesis para la diferencia de medias.

   Usando la Figura 1, se realiza la siguiente decisión:
   - ¿Se usará la estimación estadística? “No”.
   - ¿Se usará el método de pruebas de hipótesis? “Si”.
   - ¿Se usará el diseño experimental con ANOVA? “No”.
   - ¿Número de poblaciones involucradas? “Dos”.

   Remitiéndose a la Figura 5, se decide de la siguiente manera:
   - ¿Qué parámetros se quieren probar mediante hipótesis? “Medias”.
   - ¿Varianza poblacional conocida? “Si”.

   El tamaño muestral adecuado es el siguiente:

$$n_0 = 2\left(\frac{(z_{\alpha/2} + z_\beta)\sigma}{\delta}\right)^2$$

   Para detectar una diferencia de medias de 10 y lograr un poder de prueba del 90%, el tamaño muestral será:

$$n_0 = 2\left(\frac{(1{,}96 + 1{,}28)5}{10}\right)^2 = 5{,}25 \approx 6$$

4. Cálculo del tamaño muestral para la prueba de hipótesis de la diferencia de proporciones.

   Usando la Figura 1, se realiza la siguiente decisión:
   - ¿Se usará la estimación estadística? “No”.
   - ¿Se usará el método de pruebas de hipótesis? “Si”.
   - ¿Se usará el diseño experimental con ANOVA? “No”.
   - ¿Número de poblaciones involucradas? “Dos”.

   Remitiéndose a la Figura 5, se decide de la siguiente manera:
   - ¿Qué parámetros se quieren probar mediante hipótesis? “Proporciones”.
   - ¿Varianza poblacional conocida? “Si”.

   La ecuación para el tamaño muestral es la siguiente:

$$n_0 = 2\left(\frac{z_{\alpha/2} + z_\beta}{2\left(\sin^{-1}\sqrt{P+\frac{\Delta}{2}} - \sin^{-1}\sqrt{P-\frac{\Delta}{2}}\right)}\right)^2$$

   Si $P = 0{,}25$, $\Delta = 0{,}3$ y si quiere un poder de prueba del 90%, el valor del tamaño muestral es:

$$n_0 = 2\left[\frac{1{,}96 + 1{,}28}{2\left(\sin^{-1}\sqrt{0{,}25 + \frac{0{,}3}{2}} - \sin^{-1}\sqrt{0{,}25 - \frac{0{,}3}{2}}\right)}\right]^2 = 39{,}88 \approx 40$$

6. Cálculo del tamaño muestral para la estimación de la varianza poblacional

Usando la Figura 1, se realiza la siguiente decisión:
- ¿Se usará la estimación estadística? “Si”.
- ¿Se usará el método de pruebas de hipótesis? “No”.
- ¿Se usará el diseño experimental con ANOVA? “No”.
- ¿Número de poblaciones involucradas? “Una”.

Remitiéndose a la Figura 2, se decide de la siguiente manera:
- ¿Parámetro a estimar? “Varianza”.
- ¿Varianza poblacional conocida? “No”.
- ¿Población finita o infinita? “Infinita”.

El cálculo del tamaño muestral viene dado por las siguientes ecuaciones:

$$e = s_p\left(1 - \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2,n_p-1}}}\right) \quad y \quad e = s_p\left(\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2,n_p-1}}} - 1\right)$$

El máximo error que se quiere cometer al estimar la varianza es de 2. Jorge elige no realizar una muestra piloto, sino confiar en que la desviación de cada etapa es de 5. Se realiza un cálculo iterativo, dando como resultado la Tabla 9 o la Figura 9. Se observa que para un tamaño de 25 las dos diferencias del error (e) con el error calculado (e-e_1 y e-e_2) por las dos ecuaciones anteriores son positivas y la última lo más cercana a cero.

TABLA 9 - CÁLCULO DEL TAMAÑO MUESTRAL DEL INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA VARIANZA

	Iteración 1	Iteración 2	Iteración 3
e	2	2	2
n	24	25	26
$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$	38,076	39,364	40,646
$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$	11,689	12,401	13,120
e_1	1,114	1,096	1,079
e_2	2,014	1,956	1,902
e-e_1	0,886	0,904	0,921
e-e_2	-0,014	0,044	0,098

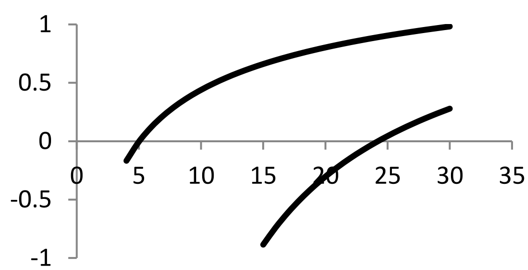


Figura 9 – Solución gráfica del tamaño muestral del intervalo de confianza para la varianza.

4.4. Recopilación de Datos

Para el análisis de las tres primeras preguntas, Jorge decide tomar un tamaño muestral de 6, ya que es el valor que se repite en la mayoría. Para la pregunta 4, optará por el valor de 40 y para la 6 por el valor de 25. Los datos recopilados se presentan en las Tablas 10 – 13.

TABLA 4 - DATOS RECOPILADOS PARA LA PREGUNTA 1

Operario	Tiempo en la etapa de montaje (min)					
	1	2	3	4	5	6
Tomás	60	58	64	55	65	60
Jorge	81	78	80	80	82	79
León	90	93	91	92	88	89
Katy	70	74	71	73	67	69

TABLA 11 - DATOS RECOPILADOS PARA LA PREGUNTA 2

Entrenamiento	Tiempo de Katy en la etapa de acabado (min)					
	1	2	3	4	5	6
Antes	100	104	98	105	99	97
Después	98	101	98	103	98	99

TABLA 5 - DATOS RECOPILADOS PARA LA PREGUNTA 3

Operario	Tiempo en la etapa de preparación (min)					
	1	2	3	4	5	6
León	110	108	111	112	109	110
Jorge	80	75	85	80	88	75

TABLA 13 - DATOS RECOPILADOS PARA LA PREGUNTA 4

	Número de mesas empaquetadas	Número de mesas mal empaquetadas
Katy	40	17
Randy	40	8

4.5. Análisis Estadístico

Para generar todos los análisis estadísticos se utilizará el paquete de estadística Statgraphics Centurion 15.2.

(1) ANOVA Simple, Tabla 14.

TABLA 6 - ANOVA SIMPLE

Origen de las variaciones	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Promedio de los cuadrados	F	Probabilidad	Valor crítico para F
Entre grupos	2991,458	3	997,153	153,21	5,8E-14	3,10
Dentro de los grupos	130,167	20	6,508			
Total	3121,625	23				

Observando la tabla ANOVA, se concluye que existe diferencia significativa en la etapa de montaje entre los distintos operarios. Por lo tanto, se deberá realizar una prueba LSD, mostrada en las Tablas 15 y 16.

TABLA 7 - DIFERENCIA DE MEDIAS POR EL MÉTODO LSD

Contraste	Sig.	Diferencia	+/- Límites
Jorge - Katy	*	9,3333	3,0724
Jorge - León	*	-10,5	3,0724
Jorge – Tomás	*	19,6667	3,0724
Katy - León	*	-19,8333	3,0724
Katy - Tomás	*	10,3333	3,0724
León - Tomás	*	30,1667	3,0724

TABLA 8 - RESULTADOS DE LA COMPARACIÓN DE MEDIAS POR LSD

Operario	Casos	Media	Grupos Homogéneos
Tomás	6	60,3333	X
Katy	6	70,6667	X
Jorge	6	80,0	X
León	6	90,5	X

Mediante la prueba LSD se constata que cada operario tiene tiempos diferentes para la operación de montaje, siendo el más rápido Tomás.

(2) Intervalo de confianza de la diferencia de medias

Los datos muestrales se ven en la Tabla 17.

TABLA 9 - RESUMEN ESTADÍSTICO PARA LA PREGUNTA 2

Resumen estadístico	Antes	Después
Recuento	6	6
Promedio	100,5	99,5
Varianza	10,7	4,3
Desviación estándar	3,2711	2,0736
Coeficiente de variación	3,25%	2,08%

Intervalos de confianza del 95,0% para la diferencia de medias suponiendo varianzas iguales: 1,0 +/- 3,5230 [-2,5230; 4,5230]. Como el intervalo contiene el cero, no hay diferencia significativa entre el tiempo de Katy en la etapa de acabado antes y después del programa de entrenamiento.

(3) Cociente de varianzas y diferencia de medias

Los estadísticos muestrales se ven en el Tabla 18.

TABLA 10 - RESUMEN ESTADÍSTICO PARA LA PREGUNTA 3

Resumen estadístico	León	Jorge
Recuento	6	6
Promedio	110,0	80,5
Varianza	2,0	27,5
Desviación estándar	1,414	5,244
Coeficiente de variación	1,28%	6,51%

- Prueba-F para comparar desviaciones estándar

  Hipótesis Nula: $\sigma_1 = \sigma_2$; Hipótesis Alternativa: $\sigma_1 \neq \sigma_2$
  F = 0,07273 valor-P = 0,012072
  Se rechaza la hipótesis nula para $\alpha = 0,05$. Las varianzas de los tiempos en la etapa de preparación entre León y Jorge son distintas.

- Prueba t para comparar medias

  Hipótesis nula: $\mu_1 = \mu_2$; Hipótesis Alternativa: $\mu_1 \neq \mu_2$
  sin suponer varianzas iguales: t = 13,3041 valor-P = 0,00001603
  Se rechaza la hipótesis nula para $\alpha = 0,05$. Los tiempos promedios en la etapa de preparación entre León y Jorge son distintos, siendo Jorge el más rápido.

4. Prueba de hipótesis de la diferencia de proporciones

   Proporciones muestrales = 0,425 y 0,2; Tamaños de muestra = 40 y 40

Hipótesis Nula: $P_1 = P_2$; Alternativa: $P_1 \neq P_2$
Estadístico z calculado = 2,170882, Valor-P = 0,02994

Rechazar la hipótesis nula para alfa = 0,05. Se concluye que existe diferencia significativa entre la proporción de mesas mal empaquetadas entre Katy y Randy, donde el último hace mejor este trabajo.

4.6. Resultados

Con los resultados de las pruebas inferenciales llevadas a cabo, Jorge puede realizar una asignación óptima de sus operarios a cada etapa de fabricación, de la siguiente manera:

Antes:

Preparación	Montaje	Acabado	Empaquetado
Tomás	León	Jorge	Katy

Después:

Preparación	Montaje	Acabado	Empaquetado
Jorge	Tomás	León	Randy

Katy se ocupará de la suplencia.

Luego de su investigación, podrá recopilar datos para su última pregunta de investigación.

- Intervalo de confianza para la varianza del tiempo en cada etapa con asignación óptima.

  A partir de los datos recopilados, Jorge generó la siguiente información, Tabla 19.

TABLA 19 - RESUMEN ESTADÍSTICO PARA LA PREGUNTA 6

Estadísticos	Jorge (Preparación)	León (Acabado)	Tomás (Montaje)	Randy (Empaquetado)
n	25	25	25	25
Media	80,5000	85,1667	60,3333	24,5000
Varianza	27,5000	46,5667	13,8667	2,3000
Desviación estándar	5,2440	6,8240	3,7238	1,5166

Los intervalos de confianza para cada operario son los siguientes: Jorge: [4,0947; 7,2952]; León: [5,3284; 9,4932]; Tomás: [2,9076; 5,1804]; Randy: [1,1842; 2,1098].

León será el único que deberá someterse a un periodo de entrenamiento para disminuir su variabilidad, ya que el valor de la desviación 5 cae fuera del intervalo.

5. CONCLUSIONES

El proceso para la determinación del tamaño muestral en una investigación de carácter cuantitativo, se concreta en la elección de la ecuación adecuada para cada objetivo y se simplifica mucho recurriendo a la ayuda de los árboles de decisiones presentado en este artículo.

La determinación de los parámetros de los que dependen las distintas ecuaciones para calcular el tamaño muestral, es tarea de los expertos en el tema que se quiere investigar (error de muestreo, varianza poblacional, errores tipo I y II, máximas diferencias a detectar, etc.), y debe ser realizada siempre con una actitud *conservadora*, sino se consiguen datos históricos o estimaciones fidedignas para respaldarlos.

Se debe tener en cuenta que los valores hallados con las ecuaciones específicas a la técnica estadística usada, son una guía o una estimación del número de unidades que deberá muestrear para cumplir con sus objetivos y lograr la precisión deseada.

Lo expuesto en este artículo debería permitir concretizar uno de los primeros pasos que se debe resolver en el difícil proceso de realización de un estudio cuantitativo.

6. REFERENCIAS

[1] Berenson, Levine y Krehbiel, *"Estadística para Administración"*, Pearson Educación, 2a Ed., México, 2001.
[2] Levin y Rubin, *"Estadística para Administradores"*, Prentice Hall S.A., 6a Ed., México, 1996.
[3] Mason y Lind, *"Estadística para Administración y Economía"*, Alfaomega, Séptima Edición, México, 1995.
[4] Freund y Simon, *"Estadística Elemental"*, Prentice Hall, Octava Edición, México, 1994.
[5] Miller, Freund y Jonson, *"Probabilidad y Estadística para Ingenieros"*, Prentice Hall S.A., 4a Ed., México, 1992.
[6] Mendenhall W., *"Estadística para Administradores"*, Grupo Editorial Iberoamérica, 2a Ed., México, 1990.
[7] García M., *"Socioestadística"*, Alianza Editorial, Madrid-España, 1985.
[8] Mood/Graybill, *"Introducción a la Teoría Estadística"*, Editorial Aguilar, 4a Ed., Madrid-España, 1976.
[9] Maisel L., *"Probabilidad y Estadística"*, Fondo Educativo Interamericano, Colombia, 1973.
[10] Hays Y Winkler, *"Statistics: Probability, Inference and Decision"*, Holt, Rinehart and Winston Inc., 1971.
[11] Lobez y Casa, *"Estadística Intermedia"*, Editorial Vicens-Vives, 1a Ed., España, 1967.
[12] Montgomery D. C., *"Control Estadístico de la Calidad"*, Grupo Editorial Iberoamérica, S.A., México, 1994.
[13] Gutierrez y De La Vara, *"Análisis y Diseño de Experimentos"*, McGraw-Hill Interamericana, 1a Ed., México, 2004.
[14] Programa Ford-Itesm, *"Inferencia Estadística, Módulo 7"*, México, 1989.
[15] Juran y Gryna, *"Manual de Control de Calidad"*, Volumen II, McGraw-Hill, Cuarta Edición, España, 1993.
[16] Duncan A., *Control de Calidad y Estadística Industrial"*, Editorial Alfaomega, México, 1989.
[17] Batattacharyya y Johnson, *"Statistical, Concepts and Methods"*, John Wiley & Sons, United States of America, 1977.
[18] Merril y Fox, *Introducción a la Estadística Económica"*, Amorrortu Editores, Argentina, 1969.
[19] Yamane T., *"Estadística"*, Editorial Harla, México, 1974.
[20] Novales A., *"Estadística y Econometría"*, McGraw-Hill Interamericana, España, 1997.
[21] Larson H., *"Introduction to Probability Theory and Statistical Inference"*, 2a Ed., Wiley International Edition, 1974.
[22] Giardina B., *"Manual de Estadística"*, Compañía Editorial Continental, México, 1968.
[23] Muxica L., *"Introducción a la Estadística Matemática"*, Univ. de Concepción, Publicaciones Docentes, Chile, 1966.
[24] Hoel P., *"Introducción a la Estadística Matemática"*, Biblioteca Interamericana de Estadística Teórica y Aplicada, Argentina, 1955.
[25] Statpoint Inc., *"Determinación del Tamaño de Muestra"*, Manuales en Línea del Paquete de Computación Estadístico Statgraphics Centurion 15.2, 2007.
[26] Martinez A., *"Diseños Experimentales"*, Universidad Autónoma de Chapingo, Editorial Trillas, México, 1988.
[27] Myers J., *"Fundamentals of Experimental Design"*, University of Massachusetts, Allyn And Bacon, Inc., Boston, 1966.
[28] Heizer y Render, *"Dirección de la Producción. Decisiones Estratégicas"*, Cuarta Edición, Prentice Hall, 1998.
[29] Montgomery D.C., *"Diseño y Análisis de Experimentos"*, Grupo Editorial Iberoamérica, S.A., México, 1991.
[30] Valdivieso C., Valdivieso R. Y Valdivieso O., *"Uso de Árboles de Decisión para la Estimación Estadística"*, UPB – Revista "Investigación y Desarrollo", 10: 105-123, 2010.
[31] Kinnear y Taylor, *"Investigación de Mercados: Un Enfoque Aplicado"*, McGraw Hill, 1994.
[32] Aaker y Day, *"Investigación de Mercados"*, McGraw Hill, México, 1990.
[33] Kotler P., *"Dirección de Mercadotecnia: Análisis, Planificación y Control"*, Ed. Diana, México, 1985.
[34] Namakforoosh M. N., *"Metodología de la Investigación",* Ed. Limusa S.A, Grupo Noriega Ed., México, 1995.
[35] Sampieri, Collado y Lucio, *"Metodología de la Investigación"*, McGraw Hill, México, 1998.
[36] Briones G., *"Métodos y Técnicas de Investigación para las Ciencias Sociales"*, Ed. Trillas, México, 2003.
[37] Kerlinger y Lee, "*Investigación del Comportamiento"*, Cuarta Edición, McGraw Hill, México, 2002.
[38] Camacho-Sandoval J., *"Tamaño de Muestra en Estudios Clínicos"*, Acta Médica Costarricense (AMC), Vol. 50 (1), 2008.
[39] Fernández P., *"Determinación del Tamaño Muestral"*, Cad. Aten Primaria 1996; 3: 138-14, 2001.
[40] Fuentelsaz C., *"Cálculo del Tamaño de la Muestra"*, Matronas Profesión, Vol. 5, Nº 18, 2004.
[41] Mateu y Casal, *"Tamaño de la Muestra"*, Rev. Epidem. Med. Prev. , 1: 8-14, 2003.
[42] Marrugat, Vila, Pavesi y Sanz, *"Estimación del Tamaño de la Muestra en la Investigación Clínica y Epidemiológica"*, Unidad de Lípidos y Epidemiología Cardiovascular. Unidad de Informática Médica. Instituto Municipal de Investigación Médica (IMIM), Med Clin (Barc), 1998; 111: 267-276.